

# ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE MEZCLAS EN SEPARACIÓN CIEGA DE FUENTES INDETERMINADA CON UN NÚMERO ARBITRARIO DE FUENTES

Yago Pereiro Estevan

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: yago@gtas.dicom.unican.es

Luis Vielva

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones  
Universidad de Cantabria  
e-mail: luis@dicom.unican.es

**Abstract**—Blind source separation consists on estimating  $n$  source signals from  $m$  measurements generated through an unknown mixing process of the sources. In the underdetermined case where we have more sources than measurements, we divide the problem into two stages: estimation of the mixing matrix and inversion of the linear problem. This paper deals with the first stage. It is well known that when the sparsity of the sources premise is true, measurements tend to align with the columns of the mixing matrix, so the problem can be formulated as estimating the peaks of multidimensional probability density functions (PDF). In this paper we analyze two different techniques to estimate this peaks: one is to convert the multidimensional PDF into the power spectral density (PSD) of multiple complex sinusoidal signals and use different multidimensional spectral estimation techniques to detect the peaks. The other is to convert the  $(m - 1)$ - multidimensional PDF to  $m - 1$  unidimensional projections and estimate the peaks of these.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de la separación ciega de fuentes (SCF) consiste en estimar  $n$  señales (fuentes) a través de  $m$  señales (medidas) formadas a partir de una mezcla desconocida de las primeras. Existen diferentes modelos dependiendo del tipo de mezcla y de la presencia o no de ruido. El modelo lineal instantáneo sin ruido para cada instante temporal es

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{s}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de fuentes,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  es el vector de medidas, y  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de mezclas desconocida.

En función del número de fuentes ( $n$ ) y medidas ( $m$ ) se plantean diferentes casos: en el caso determinado ( $m = n$ ), que ha sido ampliamente tratado en la literatura [1], [2], basta con estimar  $\mathbf{A}$ . En el sobredeterminado ( $m > n$ ), al haber más ecuaciones que incógnitas, no obtendremos generalmente una solución exacta, pero puede utilizarse como solución canónica la pseudoinversa, que minimiza la norma  $L_2$  del error [3].

El caso indeterminado ( $m < n$ ) tiene infinitas soluciones, por lo tanto necesitaremos información extra para invertir correctamente la mezcla. Dividiremos el problema en dos etapas: estimación de la matriz de mezclas e inversión de la

mezcla. En esta comunicación nos centraremos en la primera etapa, ésta ha sido tratada con anterioridad para el caso  $m = 2$  [4], [5], y se han obtenido resultados satisfactorios utilizando diferentes métodos, como el histograma [6], la utilización de técnicas como el descenso por gradiente tras obtener una ecuación analítica para la FDP utilizando el enventanado de Parzen [7], o el uso de técnicas de estimación espectral a partir de la similitud de la PDF de las direcciones de las medidas con la densidad espectral de potencia (PSD) de una señal formada por sinusoides complejas sobre ruido blanco [8].

En esta comunicación extendemos dicha estima para los casos con  $m > 2$ . Plantearemos el problema de la estimación de la matriz de mezclas en el caso indeterminado, y a continuación daremos dos soluciones: en primer lugar la reducción de la estima de los picos en las PDFs multidimensionales a la estima de picos en  $m - 1$  PDFs unidimensionales (sus  $m - 1$  proyecciones), y en segundo lugar la utilización de técnicas de estimación espectral mutidimensional explotando la similitud de la PDF de las medidas con la PSD de señales sinusoidales multidimensionales complejas.

Un factor importante en el análisis del caso indeterminado es el hecho de que los resultados de los diferentes métodos, tanto de estimación como de inversión de la mezcla, mejoran al aumentar el porcentaje de ceros en las fuentes. Por ello, cuando dichas fuentes no tienen un alto porcentaje de ceros en el dominio original, se puede realizar una transformación lineal a un dominio más propicio, como la transformada de Fourier corta en el tiempo (STFT), la transformada discreta de coseno (DCT) o *wavelets* [4], [9].

Para parametrizar dicha tasa de ceros, y así poder realizar simulaciones en función de ella, utilizaremos el siguiente modelo para la PDF de las fuentes [10]

$$p_{S_j}(s_j) = p_j \delta(s_j) + (1 - p_j) f_{S_j}(s_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

donde  $s_j$  es la fuente  $j$ -ésima,  $p_j$  es la tasa de ceros para  $s_j$ ,  $\delta(\cdot)$  es la delta de Dirac y  $f_{S_j}(s_j)$  es la PDF cuando la fuente  $j$ , que se supone de media cero, está activa.

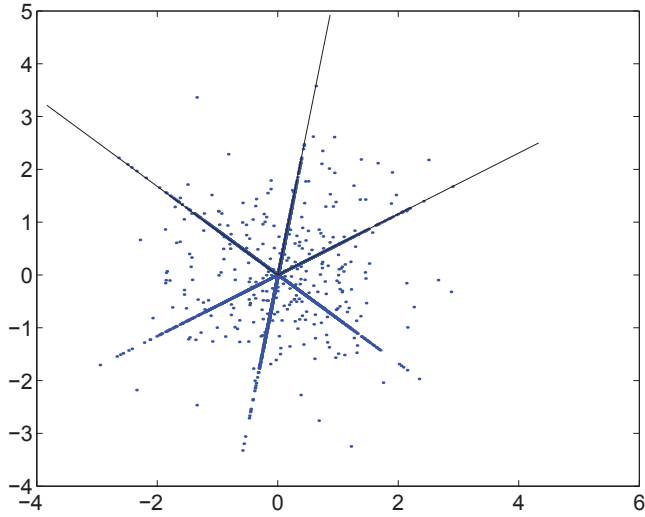


Fig. 1. Representación de las medidas (puntos) y las direcciones de las columnas de la matriz de mezcla (líneas) para  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  con una tasa de ceros en las fuentes  $p = 0.9$ .

## II. ESTIMACIÓN DE LA MATRIZ DE MEZCLA

La ecuación (1) se puede interpretar desde un punto de vista geométrico como la proyección de los vectores fuente  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$  sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^m$  de los vectores medida  $\mathbf{x}$ . Si denotamos  $\mathbf{a}_j$  a la columna  $j$ -ésima, podemos reformular (1) como

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n s_i \mathbf{a}_i = s_1 \mathbf{a}_1 + s_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + s_n \mathbf{a}_n.$$

De este modo se puede interpretar el vector  $\mathbf{x}$  como una combinación lineal de los vectores columna de la matriz de mezclas  $\mathbf{A}$ . Por lo tanto, si el porcentaje de ceros en las fuentes es alto, en muchos instantes sólo habrá una fuente  $j$  activa, con lo cual el vector de medidas  $\mathbf{x}$  tendrá la dirección de la columna  $\mathbf{a}_j$ . Así, si las fuentes tienen una alta tasa de ceros, gran parte de las medidas estarán alineadas con las direcciones de las columnas de la matriz de mezclas, como se puede ver en la figura 1 para el caso  $m = 2$ ,  $n = 3$ , que es el más sencillo de observar.

Por lo tanto, a partir de las direcciones de los vectores de medidas, podemos estimar las direcciones de las columnas de la matriz de mezclas. Si trabajamos bajo la premisa de que dichas columnas sean de módulo unidad, lo cual es consistente con los factores de escala de las fuentes en el problema de la SCF [1], podemos reducir el problema de la estima de la matriz de mezclas a la estima de dichas direcciones.

El primer paso para su estima es convertir los puntos del espacio vectorial  $m$ -dimensional y las columnas de la matriz de mezclas de una representación Cartesiana a un sistema de coordenadas esféricas, donde todos los puntos de  $\mathbf{x}$  ( $x_1, x_2, \dots, x_m$ ) se representan por su módulo  $r$  y por  $m - 1$

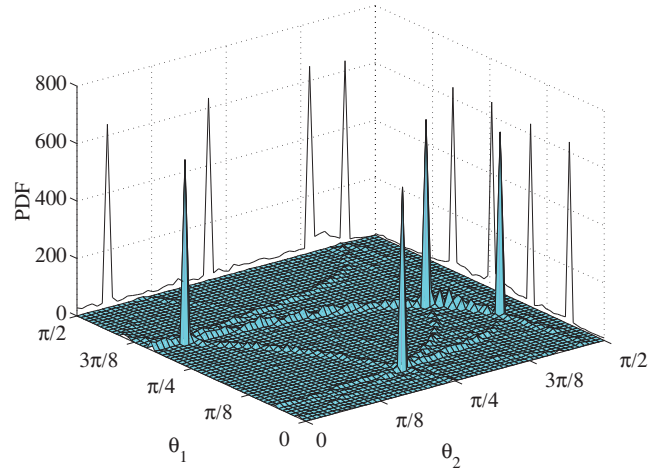


Fig. 2. histograma de los ángulos para las medidas en un escenario con tres medidas ( $m = 3$ ) y cuatro fuentes ( $n = 4$ ) con una tasa de ceros en las fuentes  $p=0.5$ . Se pueden ver también las  $m - 1$  proyecciones unidimensionales.

ángulos  $\theta_i$  según

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_{m-1} \cos \theta_{m-2} \cdots \cos \theta_3 \cos \theta_2 \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \cos \theta_{m-1} \cos \theta_{m-2} \cdots \cos \theta_3 \cos \theta_2 \sin \theta_1, \\ x_3 &= r \cos \theta_{m-1} \cos \theta_{m-2} \cdots \cos \theta_3 \sin \theta_2, \\ &\vdots \\ x_{m-1} &= r \cos \theta_{m-1} \sin \theta_{m-2}, \\ x_m &= r \sin \theta_{m-1}. \end{aligned}$$

Según esta definición, los ángulos  $\theta_i$  se pueden obtener a partir de las componentes en coordenadas rectangulares como

$$\theta_i = \arctan \frac{x_{i+1}}{\sqrt{\sum_{l=1}^i x_l^2}}, \quad i = 1, \dots, m-1. \quad (2)$$

Si aplicamos (2) a las medidas de un escenario con  $m = 3$  y  $n = 4$ , con una tasa de ceros de las fuentes  $p = 0.5$ , y representamos el histograma tomando como variables independientes los  $m - 1$  ángulos, obtenemos los resultados de la Figura 2. Se puede ver que, aún para un factor de escasez no muy alto ( $p = 0.5$ ), se distinguen claramente los cuatro picos asociados a las direcciones de las columnas de la matriz de mezclas.

### A. Utilización de técnicas de estimación espectral

Existe una gran similitud entre la PDF observada en la Figura 2 y la PSD de un conjunto de señales sinusoidales complejas bidimensionales sobre ruido blanco. Explotaremos esa similitud de forma que podamos aplicar técnicas de estimación espectral multidimensional para la estima de la matriz de mezclas.

Nos centraremos en el caso  $m = 3$ , siendo directa la extensión para  $m > 3$ . En primer lugar veremos la relación entre la PDF y la PSD como una extensión de [11], de forma que podamos aplicar técnicas de estimación espectral multidimensional, y posteriormente aplicaremos el método

*Esprit* 2 –  $D$  [12] que es una extensión del método de estimación espectral *Esprit* [13], con el fin de estimar matriz de mezclas  $\mathbf{A}$ .

1) *Relación PDF-PSD*: consideremos una variable aleatoria (v.a.) bidimensional  $U[u_1, u_2]$  en el rango bidimensional finito

$$[(U_{1\min}, U_{2\min}), (U_{1\max}, U_{2\max})]$$

y la secuencia  $u[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  de  $N$  realizaciones de  $U$ . En nuestro caso la v.a.  $U$  será la distribución de los ángulos  $[\phi_1, \phi_2]$  asociados a las medidas y obtenidos de (2) para el caso  $m = 3$ . Si realizamos las transformaciones lineales

$$\Omega_1 = -\pi + \frac{2\pi}{U_{1\max} - U_{1\min}}(U - U_{1\min}), \quad (3a)$$

$$\Omega_2 = -\pi + \frac{2\pi}{U_{2\max} - U_{2\min}}(U - U_{2\min}), \quad (3b)$$

obtendremos la nueva v.a. bidimensional,

$$\Omega = [\omega_1, \omega_2],$$

definida en el rango  $[(-\pi, \pi), (-\pi, \pi)]$ , con su respectiva secuencia de realizaciones  $\omega[n]$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Llamaremos  $\phi_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  a la PDF de  $\Omega$  y construiremos  $\tilde{\phi}_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  como la extensión periódica de  $\phi_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  con periodo  $2\pi$ . Debido a esta periodicidad, podremos considerar  $\tilde{\phi}_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  como la transformada de Fourier (TF) bidimensional de otra secuencia que llamaremos  $\phi_\Omega(k, l)$ ,

$$\tilde{\phi}_\Omega(\omega_1, \omega_2) = \mathcal{F}(\phi_\Omega(k, l)).$$

En este punto ya tenemos la relación entre la PDF y la PSD con lo que sólo nos resta obtener una manera de calcular una estima de  $\phi_\Omega(k, l)$ , a la que llamaremos  $\hat{\phi}_\Omega(k, l)$ .

Sabemos que  $\phi_\Omega(k, l)$  es la transformada inversa de Fourier de  $\tilde{\phi}_\Omega(\omega_1, \omega_2)$

$$\phi_\Omega(k, l) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_\Omega(\omega_1, \omega_2) e^{j\omega_1 k} e^{j\omega_2 l} d\omega_1 d\omega_2, \quad (4)$$

con  $k = 0, 1, \dots$  y  $l = 0, 1, \dots$ . Utilizamos  $\phi_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  en lugar de  $\tilde{\phi}_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  debido a que en el intervalo de integración ambas coinciden.

Como  $\phi_\Omega(\omega_1, \omega_2)$  es la PDF de  $\Omega$ , y conociendo que dadas las v.a.  $Z$ ,  $X$  e  $Y$ , donde  $Z = g(X, Y)$ .

$$E[Z] = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{XY}(y, x) dx dy,$$

podemos decir que la integral en (4) puede considerarse como el valor medio de la exponencial que está multiplicando a la PDF:

$$\phi_\Omega(k, l) = \frac{1}{2\pi} E[e^{j\omega_1 k} e^{j\omega_2 l}], \quad k = 0, 1, \dots$$

Por lo tanto, para estimar la PDF de  $\Omega$ , debemos estimar antes la secuencia  $\phi_\Omega(k, l)$ . Para cada valor de  $(k, l)$  veremos el problema como la estima de la media de una v.a. unidimensional  $T$  de la cuál tenemos  $N$  realizaciones obtenidas de

$$t[n] = e^{j\omega_1[n]k} e^{j\omega_2[n]l}, \quad n = 0, 1, \dots, N;$$

de forma que

$$\hat{\phi}_\Omega(k, l) = \frac{1}{(2\pi)^2 N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\omega_1[n]k} e^{j\omega_2[n]l}, \quad k = 0, 1, \dots$$

2) *Aplicación del método Esprit-2D*: una vez obtenida la secuencia  $\hat{\phi}_\Omega(k, l)$ , se pueden aplicar diferentes técnicas para estimar las frecuencias  $[f_{1j}, f_{2j}]$  asociadas a los picos de la PSD. En esta comunicación utilizaremos el *Esprit-2D* [12], que es una extensión del método de estimación espectral *Esprit* [13] para la estimación bidimensional. Éste, partiendo de una señal sinusoidal compleja bidimensional sobre ruido, estima las frecuencias  $f_{1k}, f_{2k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Una vez obtenidas dichas frecuencias, sólo resta invertir la transformación lineal inicial (3) para obtener los ángulos  $[\phi_1, \phi_2]$  asociados a los picos de la v.a. inicial  $U$ , que se corresponderán con los ángulos asociados a las columnas de la matriz de mezclas.

### B. Reducción de la dimensión por proyección

En la Figura 2 se puede ver que la PDF  $(m-1)$  dimensional está compuesta de  $n$  picos, y que, aún para un factor de escasez de  $p = 0.5$ , son bastante finos. En primer lugar parametrizaremos las medidas aplicando una transformación a coordenadas esféricas según (2). A continuación estimaremos los  $n$  máximos para cada uno de los  $m-1$  ángulos obtenidos. Para ello podemos aplicar diferentes técnicas: descenso por gradiente a partir del histograma, utilización del inventariado de Parzen [7] o la utilización de técnicas de estimación espectral debido a la semejanza de la PDF unidimensional con la PSD de un conjunto de señales sinusoidales sobre ruido blanco [8].

Una vez hemos obtenido las estimas de cada uno de los ángulos, resta encontrar las combinaciones correctas, ya que no todas las  $n^{m-1}$  combinaciones de los máximos estimados corresponden a un máximo de la PDF inicial. Sólo habrá  $n$  máximos, uno por cada columna de la matriz de mezclas.

Para la estima de las  $n$  combinaciones correctas una solución es definir una pequeña región alrededor de cada combinación posible de ángulos, de forma que evaluamos cada medida para ver si se encuentra en alguna de estas regiones. De este modo, en las regiones definidas por las combinaciones correctas habrá muchos más puntos, y así podremos estimar las combinaciones correctas.

## III. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se ha realizado una serie de simulaciones de Montecarlo para cada uno de los métodos sobre un escenario con  $m = 3$ ,  $n = 4$ , utilizando como fuentes señales de tipo gaussiano de media cero y varianza uno. Dichas simulaciones se han repetido para diferentes valores de la tasa de ceros en las fuentes, realizando, para cada valor de la tasa de ceros ( $p$ ), 20 simulaciones con matrices generadas de manera aleatoria.

La figura de mérito utilizada para caracterizar la bondad de la estima ha sido el error cuadrático medio (MSE) de los

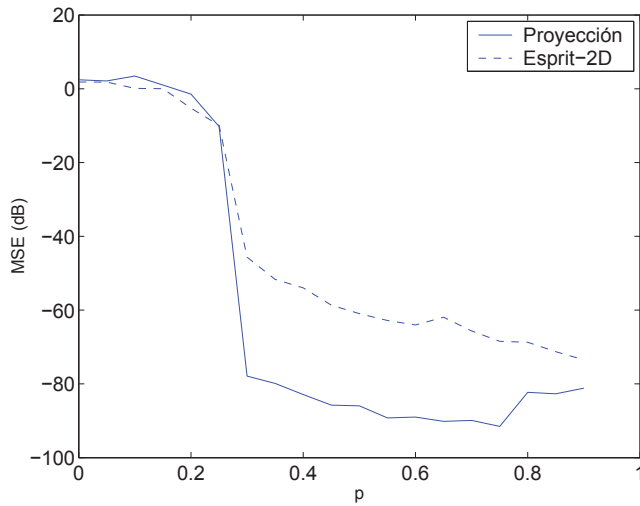


Fig. 3. MSE de los ángulos  $\hat{\theta}_{i1}, \hat{\theta}_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , en función de la tasa de ceros en las fuentes ( $p$ ) al realizar la estimación utilizando el método *Esprit*2D (línea continua) y al aplicar el método de las  $m - 1$  proyecciones (línea discontinua).

ángulos estimados, definido como

$$\text{MSE} = E \left[ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{m-1} \sum_{k=1}^{m-1} (\theta_{jk} - \hat{\theta}_{jk})^2 \right],$$

donde  $n$  es el número de fuentes,  $\theta_{jk}$  los ángulos reales y  $\hat{\theta}_{jk}$  los ángulos estimados, para  $k = 1, \dots, m - 1$ .

Para el método de reducción por proyección, se ha realizado una serie de simulaciones de Montecarlo utilizando el *Esprit* como método de estima de las PDFs unidimensionales y definiendo las regiones en torno a las combinaciones posibles de  $2 \times 10^{-3}$  radianes. Los resultados obtenidos con este método se pueden ver en la Figura (3). Se observa que, a partir de tasas de ceros de un 30% el error cuadrático medio es del orden de  $-80$  dB.

En el caso de la aplicación de técnicas de estimación multidimensional, al realizar las simulaciones, nos encontramos con una cierta limitación computacional, no es posible trabajar con secuencias de correlación de más de  $50 \times 50$  puntos (mientras que en el *Esprit* unidimensional trabajabamos con 500 puntos). Para estos valores, como se puede ver en la Figura (3) obtenemos, a partir del 40% de tasa de ceros en las fuentes, un error menor a  $-50$  dB.

#### IV. CONCLUSIONES

La mayor parte de los métodos existentes para la solución del problema de separación ciega de fuentes en el caso indeterminado se centraban en escenarios con dos medidas, que permitían una interpretación geométrica sencilla en el plano. En esta comunicación hemos abordado la generalización a un escenario con un número arbitrario de fuentes ( $m > 1$ ).

Los dos métodos implementados resuelven de manera óptima el problema de la estima de la matriz de mezclas. El primero, utilizando un método sencillo como son las

proyecciones unidimensionales de la PDF multidimensional de los ángulos de las medidas, permite generalizar el problema sin el aumento exponencial de cómputo que está asociado a la estimación de PDFs multidimensionales. A pesar de su sencillez, ofrece resultados muy buenos, similares a los observados en el escenario con  $m = 2$ ,  $n = 3$  utilizando métodos de estimación unidimensional. El segundo método, más elegante por abordar directamente la estimación de picos de una densidad espectral de potencia multidimensional mediante técnicas de análisis espectral de alta resolución, ofrece también resultados excelentes, pero que se ven limitados por el alto coste computacional y los requisitos de memoria, lo que impide obtener una resolución tan alta como la del primer método.

Dada la directa extensión de estos métodos a escenarios de orden superior, puede decirse que se ha resuelto el problema de la estima de la matriz de mezclas en el caso indeterminado para un número arbitrario de medidas.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Ministerio de Ciencia y Tecnología bajo el proyecto TIC2001-0751-C04-03.

#### REFERENCES

- [1] A. Hyvärinen, Juha Karhunen, y Erkki Oja, *Independent Component Analysis*, John Wiley & Sons New York, 2001.
- [2] S. Haykin, Ed., *Unsupervised Adaptive Filtering, Vol I: Blind Source Separation*, John Wiley & Sons, New York, 2000.
- [3] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.
- [4] P. Bofill and M. Zibulevsky, *Underdetermined blind source separation using sparse representations*. Signal Processing, vol. 81, no 11, pp 2353–2363, 2001.
- [5] C. G. Puntonet, A. Prieto, C. Jutten, M. Rodríguez-Alvarez, and J. Ortega, "Separation of sources: A geometry-based procedure for reconstruction of  $n$ -valued signals," *IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 46, no. 3, pp. 267–284, 1995.
- [6] A. Jung, F. Theis, C. Puntonet, and E. Lang, "Fastgeo - a histogram based approach to linear geometric ICA," in *Independent Component Analysis*, San Diego. CA, Dec. 2001, pp. 349–354.
- [7] D. Erdoğmuş, L. Vielva, J. C. Príncipe, *Nonparametric estimation and tracking of the mixing matrix for underdetermined blind source separation*, in Proceedings of ICA-2001, Independent Component Analysis, San Diego. CA, 2001, pp. 189–193.
- [8] L. Vielva, I. Santamaría, C. Pantaleon, J. Ibañez, D. Erdoğmuş, J. C. Príncipe, *Estimation of the mixing matrix for underdetermined blind source separation using spectral estimation techniques*, Proceedings XI European Signal Processing Conference, EUSIPCO 2002, September 3-6, 2002 Toulouse, France, Vol. I, pp. 557–560.
- [9] M. Zibulevsky, B. Pearlmutter, P. Bofill, and P. Kisilev, *Independent Components Analysis: Principles and Practice*, chapter Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary, Cambridge University Press, 2000.
- [10] L. Vielva, D. Erdoğmuş, and J. C. Príncipe, "Underdetermined blind source separation using a probabilistic source sparsity model," in *Proceedings of ICA-2001, Independent Component Analysis*, San Diego. CA, Dec. 2001, pp. 675–679.
- [11] A. Pagés-Zamora and M. A. Lagunas, *New approaches in nonlinear signal processing: Estimation of the pdf function by spectral estimation methods*, in Independent Component Analysis, (San Diego. CA), 2001.
- [12] Stéphanie Rouquette and Mohamed Najim *Estimation of frequencies and Damping Factors by Two dimensional ESPRIT Type Methods*, IEEE Transactions on signal processing, vol. 49, NO. 1, January 2001.
- [13] P. Stoica, R. L. Moses. *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice Hall 1997.